

# Control 4 Álgebra MA 110

## Pequeño Problema 1

- i) Utilice el Teorema del Binomio en la expresión  $(1+x)^{2m} + (1-x)^{2m}$  para probar, sin usar inducción, que
- $$\sum_{k=0}^{2m} \binom{2m}{2k} = 2^{2m-1}, \quad \forall m \geq 1$$

Solución:

$$\begin{aligned} (1+x)^{2m} + (1-x)^{2m} &= \sum_{i=0}^{2m} \binom{2m}{i} x^i + \sum_{i=0}^{2m} \binom{2m}{i} (-x)^i = \sum_{i=0}^{2m} \binom{2m}{i} x^i + \sum_{i=0}^{2m} (-1)^i \binom{2m}{i} x^i \\ &= \sum_{i=0}^{2m} \binom{2m}{i} x^i [1 + (-1)^i] \end{aligned} \quad \longrightarrow \textcircled{1.0}$$

En esta última suma, los términos para  $i$  impar son nulos pues  $1 - (-1)^{2k-1} = 1 - 1 = 0$

Considerando, entonces, los términos para  $i$  par, es decir para  $i = 2k$  con  $k \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$  se tiene.

$$(1+x)^{2m} + (1-x)^{2m} = \sum_{k=0}^m \binom{2m}{2k} x^{2k} [1 + (-1)^{2k}] = 2 \sum_{k=0}^m \binom{2m}{2k} x^{2k} \quad \longrightarrow \textcircled{1.0}$$

y esta expresión es válida  $\forall x \in \mathbb{R}$ , en particular para  $x=1$

Entonces  $(1+1)^{2m} + (1-1)^{2m} = 2 \sum_{k=0}^m \binom{2m}{2k} 1^{2k} = 2 \sum_{k=0}^m \binom{2m}{2k}$

$$\Rightarrow 2^{2m} = 2 \sum_{k=0}^m \binom{2m}{2k} \Rightarrow \boxed{\sum_{k=0}^m \binom{2m}{2k} = 2^{2m-1}} \quad \forall m \geq 1 \quad \longrightarrow \textcircled{1.0}$$

- ii) Calcule en función de  $n$  el valor de la suma  $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{(k+1)(k+2)}$

Solución:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\binom{n}{k}}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!(k+1)(k+2)(n-k)!} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{(k+2)!(n-k)!}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(n+2)!}{(k+2)!(n-k)!} \quad \text{en donde se completó el factorial del numerador} \longrightarrow (1.0) \\
&= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n+2}{k+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=2}^{n+2} (-1)^{k-2} \binom{n+2}{k} \quad \left( \begin{array}{l} \text{cambio de} \\ \text{índices} \\ k \rightarrow k-2 \end{array} \right) \\
&= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left[ \sum_{k=0}^{n+2} (-1)^k \binom{n+2}{k} - \binom{n+2}{0}(-1)^0 - \binom{n+2}{1}(-1)^1 \right] \quad \left( \begin{array}{l} \text{se completó} \\ \text{la suma e} \\ \text{partía de 0,} \end{array} \right) \\
&= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left[ \sum_{k=0}^{n+2} (-1)^k \binom{n+2}{k} - 1 + n+2 \right] \longrightarrow (1.0) \\
&= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left[ \overbrace{\sum_{k=0}^{n+2} (-1)^k \binom{n+2}{k}}^{\text{Binomio}} + n+1 \right] = \frac{n+1}{(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

$$\text{An} \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\binom{n}{k}}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{n+2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \longrightarrow (1.0)$$

# Control 4 Álgebra MA 110

## Parte Problema 2

i) Sean  $i, k, n \in \mathbb{N}$  tales que  $0 \leq k \leq i \leq n$ . Pruebe que  $\binom{n}{k} \binom{n-k}{i-k} = \binom{n}{i} \binom{i}{k}$  y utilícelo para demostrar que  $\sum_{k=0}^n \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} \binom{i}{k} = 3^n$

Solución

$$\binom{n}{k} \binom{n-k}{i-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{(i-k)!(n-i)!} = \frac{n!}{k!(i-k)!(n-i)!}$$

$$\text{y } \binom{n}{i} \binom{i}{k} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot \frac{i!}{(i-k)!k!} = \frac{n!}{k!(i-k)!(n-i)!}$$

Segue que  $\binom{n}{k} \binom{n-k}{i-k} = \binom{n}{i} \binom{i}{k} \longrightarrow \textcircled{1.0}$

$$\sum_{k=0}^n \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} \binom{i}{k} = \sum_{k=0}^n \sum_{i=k}^n \binom{n}{k} \binom{n-k}{i-k} \quad \text{usando la propiedad}$$

$$= \sum_{k=0}^n \left[ \binom{n}{k} \sum_{i=k}^n \binom{n-k}{i-k} \right]$$

↓ independiente de  $i$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} 1 \cdot 1 \quad \text{cambio de índices } i-k \rightarrow i$$

Binomio  $\longrightarrow \textcircled{1.0}$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1+1)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} \cdot 1^k = (1+2)^n$$

Binomio

$$\text{En } \sum_{k=0}^n \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} \binom{i}{k} = 3^n \longrightarrow \textcircled{1.0}$$

ii) Un insecto del cielo, saltando, la distancia de 0 a 1 avanzando de izquierda a derecha. En cada punto en que se encuentre puede elegir saltar hasta 1 (y completar el recorrido) o avanzar la mitad del tramo restante.

Pruebe que la colección de recorridos (secuencias de pasos) por los que puede optar el insecto es NUMERABLE.

### Solución:

Es importante observar que se pregunta por la colección de RECORRIDOS por los que puede optar el insecto y no por el n° de saltos.

Ahora, si opta por saltar indefinidamente avanzando en cada salto la mitad del tramo restante, esto es UN SOLO RECORRIDO, por ejemplo, lo identificamos en  $\{R_\infty\}$ .

Por otro lado, si lo hace saltando  $n$  veces, completando el recorrido  $\forall n \geq 1$  cada vez, la colección de estos recorridos será el conjunto  $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}-\{0\}}$

Claramente  $|\{R_n\}| = |\mathbb{N}-\{0\}| = |\mathbb{N}|$  de modo que

$\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}-\{0\}}$  es numerable.

y también  $|\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}-\{0\}} \cup \{R_\infty\}| = |\mathbb{N}|$  ↗ un solo recorrido

Entonces, la colección total de recorridos es NUMERABLE.

→ (1.5)